Exponentialgleichungen, die durch Substitution gelöst werden können

1. $4^x - 2^{x+4} = -60$
2. $e^{2x} = 5 \cdot e^x + 24$

Lösungen:

1. Sei $2^x := u \Rightarrow 4^x = 2^{2x} = u^2$ und $2^{x+4} = 2^x \cdot 2^4 = 16u$

$\Rightarrow u^2 - 16u + 60 = 0 \Rightarrow u_1 = 10,\ u_2 = 6$

$\Rightarrow 2^x = 10$ oder $2^x = 6 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = \frac{\log(10)}{\log(2)},\ x_2 = \frac{\log(6)}{\log(2)}}}$

2. $e^x := u \Rightarrow u^2 - 5u - 24 = 0 \Rightarrow u_1 = 8,\ u_2 = -3$

$\Rightarrow e^x = 8$ (2. Lösung -3 ist nicht möglich) $\Rightarrow \underline{\underline{x = \ln(8)}}$

Logarithmengleichungen

Grundlage:

$\log_a(f(x)) = b \Rightarrow a^b = f(x)$

dies nach x auflösen.

1.

$\lg(x+3) = 2 + \lg(x-3)$

Lösung:

$\lg(x+3) - \lg(x-3) = 2 \Rightarrow \lg\left(\frac{x+3}{x-3}\right) = 2$

$\Rightarrow 10^2 = \frac{x+3}{x-3} \Rightarrow 100x - 300 = x + 3$

$\Rightarrow 99x = 303 \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{101}{33}}}$

2.

$\lg(x-5) = \lg(x) - \lg(5)$

Lösung:

$\lg(x) - \lg(x-5) = \lg(5) \Rightarrow \lg\left(\frac{x}{x-5}\right) = \lg(5)$

$\Rightarrow \frac{x}{x-5} = 5 \Rightarrow 5x - 25 = x \Rightarrow 4x = 25 \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{25}{4}}}$

3.

$\lg(x)+\lg(x-3)=1$

Lösung:

$\lg\left(x\cdot(x-3)\right)=1 \Rightarrow x\cdot(x-3)=10$

$\Rightarrow x^2-3x-10=0 \Rightarrow x_1=5,\ x_2=-2$

-2 ist nicht möglich $\Rightarrow \underline{\underline{x=5}}$

Umkehrfunktionen

Besitzt y = f(x) eine Umkehrfunktion, bestimmt man sie wie folgt:
Man löse die Funktionsgleichung nach x auf und vertausche anschliessend die Variablen x und y.

Beispiel:

$$f(x)=y=20\cdot\lg\left(\frac{x}{0.00002}\right)$$

Man suche die Umkehrfunktion $g(x)$.

Auflösen nach x:

$$\frac{y}{20}=\lg_{10}\left(\frac{x}{0.00002}\right)$$

In Exponentialform schreiben:

$$10^{\frac{y}{20}}=\frac{x}{0.00002} \Rightarrow x=0.00002\cdot 10^{\frac{y}{20}}$$

x und y vertauschen:

$$\Rightarrow \underline{\underline{g(x)=y=0.00002\cdot 10^{\frac{x}{20}}}}$$

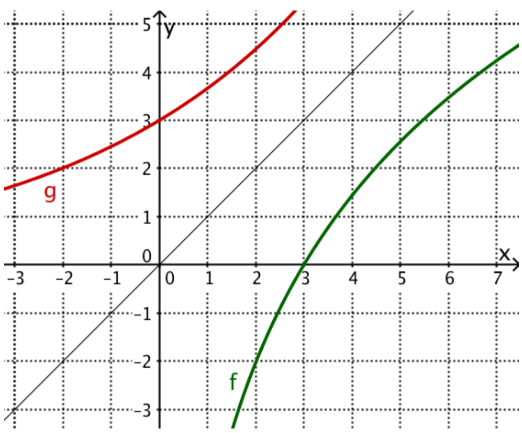
Aufgabe:

Man finde die Umkehrfunktion von $f(x)=y=5\cdot\ln\left(\frac{x}{3}\right)$

Lösung

$$y=5\cdot\ln\left(\frac{x}{3}\right) \Rightarrow \frac{y}{5}=\ln\left(\frac{x}{3}\right) \Rightarrow e^{\frac{y}{5}}=\frac{x}{3} \Rightarrow 3\cdot e^{\frac{y}{5}}=x$$

x und y vertauschen: $\underline{\underline{g(x)=y=3\cdot e^{\frac{x}{5}}}}$



Die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion sind symmetrisch zur Geraden y = x.

Logarithmen 2. Teil

Anwendung:

Dezibel-Skala

Physikalische Grösse:
Massgeblich für das Ohr ist der Schalldruck in Pa (Pascal) = N / m^2.

Hörschwelle: 0.00002 Pa
(Zum Vergleich: Luftdruck Atmosphäre ca. 100'000 Pa; wir nehmen also bereits eine Druckschwankung wahr, die den 5 Milliardsten Teil des Atmosphärendrucks ausmacht; so empfindlich ist unser Trommelfell.)

Schmerzgrenze: ca. 35 ... 60 Pa.
Zwischen Hörschwelle und Schmerzgrenze besteht somit ein Schalldruckverhältnis von 1 : 1 Million bis 1 : 3 Millionen: eine ausserordentliche Leistung unserer Ohren!

Schalldruckpegel: Logarithmische Dezibel-Skala für einen Ton von 1000 Hz.
0 dB = Hörschwelle, 130 dB = Schmerzgrenze.
Sei
L der Geräuschpegel in dB,
p der physikalisch wirkende Schalldruckunterschied in Pa,
$p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa = Hörschwelle.

Es gilt:

$$\boxed{L = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{0.00002\ \text{Pa}}\right)}$$

20 dB mehr bedeuten eine Verzehnfachung des Schalldrucks.

Schalldruckpegel L in dB: L = 20 • lg(p / 0.00002 Pa)

dB	**0**	10	**20**	30	**40**	50	**60**	70	**80**	90	**100**	110	**120**
	0.00002		0.0002		0.002		0.02		0.2		2		20

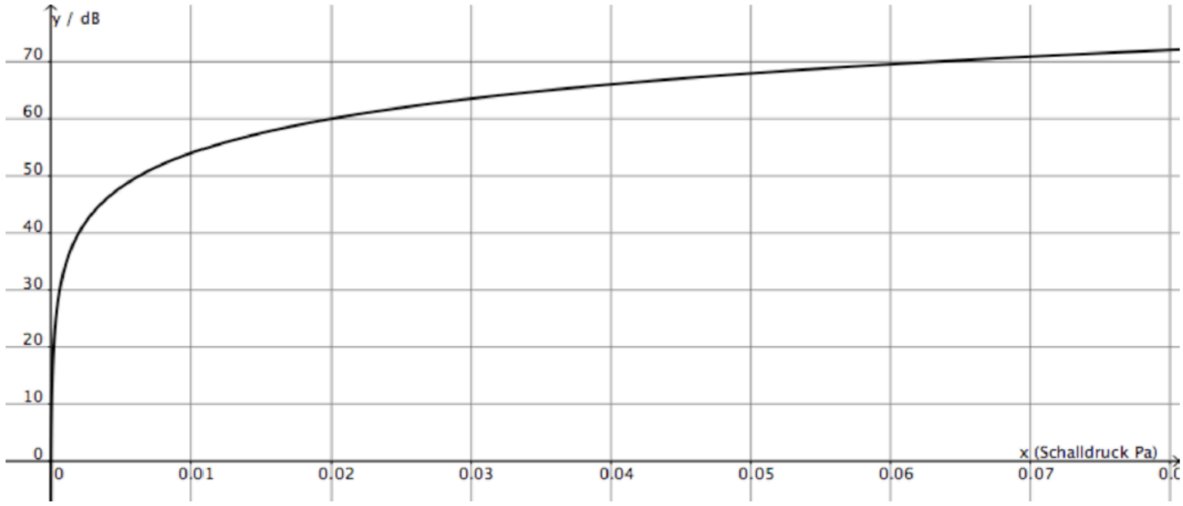
Schalldruck p in Pa = N / m^2 (Hörschwelle: 0.00002 Pa)

Beispiele zur Dezibel-Skala

0	Hörschwelle	70	lebhafter Verkehr
10	Atmen	100	Disco
20	Blätterrascheln	130	Schmerzgrenze
60	Unterhaltung zweier Personen	160	Entfaltung Airbag, Pistole

(Quelle: www.wissen.de und www.sengpielaudio.com/TabelleDerSchallpegel.htm)

Die folgende Grafik zeigt den Verlauf der **Dezibel-Skala (y-Achse)** bei gleichmässig zunehmendem **Schalldruck (x-Achse)**. Im leisen Bereich werden kleinste Druckzunahmen als starke Lautstärkezunahme empfunden. Im lauten Bereich flacht diese Sensibilität ab. Der Verlauf entspricht einer Logarithmusfunktion. Allerdings entspricht die dB-Skala nicht durchwegs der subjektiven Lautstärke-Empfindung.



x = Schalldruck in Pascal (= N / m^2);
y = Lautstärke-Pegel in dB.
20 Dezibel mehr bedeuten eine Verzehnfachung des Schalldrucks.

Es gilt: $y = 20 \cdot \lg\left(\frac{x}{0.00002}\right) = 20 \cdot \lg(50'000x)$

	Schallpegel	
	Bereich	typisch
Rockkonzert, im Zuhörerbereich	90 – 105	100 dB(A)
Rock- und Jazzmusik, im Übungslokal	90 – 105	102 dB(A)
Club/Diskothek, auf der Tanzfläche	90 – 100	98 dB(A)
Club/Diskothek, an der Bar	85 – 95	90 dB(A)
MP3-Spieler, mit Ohrhörern	60 – 110	85 dB(A)
Stereoanlage	60 – 100	80 dB(A)
Blasmusikprobe, im Schulzimmer	90 – 95	90 dB(A)
Guggenmusik, im Übungsraum	95 – 105	100 dB(A)

Quelle: Suva: Beat W. Hohmann: Musik und Hörschäden, Best.-Nr. 84001.d unter www.suva.ch

Aufgaben dazu:

a) Wie gross ist L für die Hörschwelle x = 0.00002 Pa?
b) Wie gross ist die Dezibel-Zunahme, wenn der Schalldruck verdoppelt wird?
c) Man löse die Gleichung L = f(p) nach p auf, d.h. bestimme die Umkehrfunktion p = f(L). Wie gross ist dann der Schalldruck für 40 dB (Gespräch) und für 100 dB (Motorrad ohne Schalldämpfer)?

Lösungen:

$$a)\ L = 20 \cdot \lg\left(\frac{p_0}{p_0}\right) = 20 \cdot \lg(1) = 0 \text{ dB}$$

$$b)\ L_1 = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{0.00002}\right),\ L_2 = 20 \cdot \lg\left(\frac{2p}{0.00002}\right) = 20 \cdot \lg\left(2 \cdot \frac{p}{0.00002}\right)$$

$$= 20 \cdot \lg(2) + 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{0.00002}\right) = 20 \cdot \lg(2) + L_1$$

$$\Rightarrow L_2 - L_1 = 20 \cdot \lg(2) \approx 6 \text{ dB}$$

Einer Verdoppelung des Schalldrucks entspricht
eine Zunahme von ca. 6 Dezibel.

$$c)\ L = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{0.00002}\right) \Rightarrow \frac{L}{20} = \lg\left(\frac{p}{0.00002}\right)$$

$$\Rightarrow 10^{\frac{L}{20}} = \frac{p}{0.00002} \Rightarrow \underline{\underline{0.00002 \cdot 10^{\frac{L}{20}} = p}}$$

$$L = 40 \text{ dB: } p = 0.00002 \cdot 10^{\frac{40}{20}} = 0.002 \text{ Pa}$$

$$L = 100 \text{ dB: } p = 0.00002 \cdot 10^{\frac{100}{20}} = 2 \text{ Pa}$$