Urs Vonesch

Lagranges konstruktiver Beweis über Körpersymmetrien

Quelle: Andreas Speiser: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 5.Auflage, Birkhäuser Basel, 1980, p.241

Seien $x_1, \dots, x_n$ die sämtlichen Nullstellen eines Polynoms mit Koeffizienten aus einem Körper K (z.B. K = $\mathbb{Q}$) und seien diese Nullstellen alle paarweise verschieden.
Sei $\mathrm{K}(x_1, \dots, x_n)$ der Zerfällungskörper des Polynoms.
Sei G die Gruppe der Permutationen der x_i, welche K elementweise fix lassen.
Sei $t_1 \in \mathrm{K}(x_1, \dots, x_n)$ ein Element mit genau der Symmetrie H (H = Untergruppe von G).
Seien die sämtlichen Ausdrücke, die aus t_1 durch die Permutationen aus G entstehen mit t_2, t_3, ... bezeichnet.
$\mathrm{K}(t_1)$ ist ein Zwischenkörper zwischen K und $\mathrm{K}(x_1, \dots, x_n)$. Seine Elemente besitzen dann auch genau die Symmetrien von H.
Sei $q_1 \in \mathrm{K}(x_1, \dots, x_n)$ ebenfalls ein Element mit Symmetrie H.
Seien die sämtlichen Ausdrücke, die aus q_1 durch die Permutationen aus G entstehen mit q_2, q_3, ... bezeichnet.

Lagrange zeigte konstruktiv, dass dann auch q_1 in $\mathrm{K}(t_1)$ liegt, d.h. alle Elemente mit Symmetrie H liegen in $\mathrm{K}(t_1)$.

Wir haben dann also:
Ein Element g liegt in $\mathrm{K}(t_1)$ $\Rightarrow$ g hat die Symmetrie H: Diese Richtung ist klar.
Lagrange zeigte die Umkehrung:
q_1 hat Symmetrie H $\Rightarrow$ q_1 liegt in $\mathrm{K}(t_1)$.
Zusammen folgt:
q_1 hat Symmetrie H $\Leftrightarrow$ q_1 liegt in $\mathrm{K}(t_1)$,
d.h. *genau* die Elemente von $\mathrm{K}(t_1)$ haben die Symmetrie H.
Der Zwischenkörper ist *charakterisiert* durch die Symmetrie H seiner Elemente.

Lagranges Beweis:

Lagrange bildet

$$g(X) := \frac{(X-t_1)(X-t_2)\ldots \cdot q_1}{(X-t_1)} + \frac{(X-t_1)(X-t_2)\ldots \cdot q_2}{(X-t_2)} + \cdots$$

$g(X)$ bleibt stabil unter allen Permutationen (aus G) der x_i, denn eine solche Permutation vertauscht lediglich die Summanden (geht t_i auf t_j, geht auch q_i auf q_j).

$g(X)$ hat folglich (nach dem Hauptsatz über symmetrische Funktionen) seine Koeffizienten aus K.

Es ist $g(t_1) = (t_1 - t_2)(t_1 - t_3)\ldots q_1$. (Nur der 1. Summand bleibt nach Kürzung des Faktors $(x - t_1)$ aus Zähler und Nenner erhalten; die übrigen Summanden werden 0.)

$g(t_1)$ ist, weil $g(X)$ seine Koeffizienten aus K hat, aus $\mathrm{K}(t_1)$.

Sei $h(X) := (X - t_1)(X - t_2)$ … . Diese Funktion ist ebenfalls stabil unter allen Permutationen (aus G) der x_i und hat deshalb seine Koeffizienten ebenfalls aus K.

Nun bildet Lagrange mit Hilfe der Produktregel die Ableitung von *h(X)*:

$h'(X) = [(X - t_1)]' \cdot [(X - t_2) \ldots] + [(X - t_1)] \cdot [(X - t_2) \ldots]' \Rightarrow$

$h'(t_1) = 1 \cdot (t_1 - t_2)(t_1 - t_3)\ldots + 0 = (t_1 - t_2)(t_1 - t_3) \ldots$

Mit *h(X)* hat natürlich auch *h'(X)* seine Koeffizienten aus K und folglich ist $h'(t_1) \in \mathrm{K}(t_1)$.

Nun haben wir $g(t_1) = (t_1 - t_2)(t_1 - t_3)\ldots q_1 = h'(t_1) \cdot q_1 \Rightarrow q_1 = \frac{g(t_1)}{h'(t_1)} \in \mathrm{K}(t_1)$

q.e.d.

Wir spielen obiges Verfahren an einem Beispiel durch:
Die Körpererweiterungen beim Lösen der allgemeinen Gleichung 4. Grades sahen so aus:

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(u, v, w) \subset \mathbb{Q}(u, v, w, x_1 x_2) \subset \mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4)$

Wir möchten zeigen, dass auch das Element $q_1 := x_1 + x_2$, welches dieselben Symmetrien

wie $t_1 := x_1 x_2$ hat, in $\mathbb{Q}(u, v, w, x_1 x_2)$ liegt.

Es ist $t_1 \in \mathbb{Q}(u, v, w, x_1 x_2)$.

$u = x_1 x_2 + x_3 x_4$

$v = x_1 x_3 + x_2 x_4$

$w = x_1 x_4 + x_2 x_3$

Wir wählen K = $\mathbb{Q}(u, v, w)$.

Die Elemente von $\mathbb{Q}(u, v, w)$ bleiben fix unter

$G = \{id, (x_1\ x_2)(x_3\ x_4), (x_1\ x_4)(x_2\ x_3), (x_1\ x_3)(x_2\ x_4)\}$.

$t_1 = x_1 x_2$ und $q_1 = x_1 + x_2$ bleiben fix unter H = $\{ id, (x_1\ x_2)(x_3\ x_4)\} \subset$ G.

Es ist dann $t_2 = x_3 x_4,\ q_2 = x_3 + x_4$. Andere Werte entstehen unter G nicht.

$g(t_1) = (x_1 x_2 - x_3 x_4)(x_1 + x_2)$

$h'(t_1) = (x_1 x_2 - x_3 x_4) = \mathbf{2x_1 x_2 - u} \in \mathbb{Q}(u, v, w, x_1 x_2)$

Es wird dann $x_1 + x_2 = \frac{g(t_1)}{h'(t_1)}$

Auch $g(t_1)$ können wir mit Hilfe der elementarsymmetrischen Funktionen vereinfachen

(man beachte den «Trick» mit den roten Summanden, die 0 ergeben):

$g(t_1) = (x_1 x_2 - x_3 x_4)(x_1 + x_2) =$

$x_1{}^2 x_2 - x_1 x_3 x_4 + x_1 x_2{}^2 - x_2 x_3 x_4 \mathbf{- x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 - x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_4}$

$= x_1{}^2 x_2 + x_1 x_2{}^2 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + a_1$

$= x_1 x_2 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + a_1 \ = \ \mathbf{-x_1 x_2 a_3 + a_1} \in \mathbb{Q}(u, v, w, x_1 x_2)$

Es folgt: $x_1 + x_2 = \frac{g(t_1)}{h'(t_1)} = \frac{a_1 - x_1 x_2 a_3}{2x_1 x_2 - u} \in \mathbb{Q}(u, v, w, x_1 x_2)$

Wir benützten die elementarsymmetrischen Funktionen:

$a_3 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

$a_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4$

$a_1 = -(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4)$

$a_0 = x_1 x_2 x_3 x_4$