Aufgabenstellung

Die folgende Aufgabe wurde anlässlich der Vorlesung zum höheren Lehramt in Mathematik gestellt von P.Gallin und H.Klemenz, Universität Zürich, 2009:

Gibt es (abgesehen von den trivialen Fällen parallel zu den Koordinatenachsen) Quader mit ganzzahligen Kantenlängen, deren Ecken ebenfalls ganzzahlige Koordinaten haben? Wie kann man solche Quader erzeugen?

Lösungsansatz *(Urs Vonesch)*

Quader mit ganzzahligen Eck-Koordinaten und ganzzahligen Kantenlängen

Grundidee

Ein Quader mit Kantenlängen a, b, c $\in \mathbb{N}$ und Ecken auf einem ganzzahligen, dreidimensionalen Punktgitter (eine Ecke sei der Nullpunkt) sei im Folgenden "diophantischer Quader" genannt. Ein solcher kann durch eine Drehung um den Nullpunkt in "Grundposition" gebracht werden (Kanten parallel zu den Koordinatenachsen). In dieser Position sind die Ecken wieder Gitterpunkte, denn die Kantenlängen sind ja unverändert ganzzahlig.
Umgekehrt entsteht deshalb jeder Quader in "schiefer Lage" aus einem *gleich dimensionierten* Quader aus der Grundposition. Die entsprechende Drehmatrix D ist eine Komposition dreier Teildrehungen um die Koordinatenachsen:

$$D=\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\gamma] & -\mathrm{Sin}[\gamma] & 0 \\ \mathrm{Sin}[\gamma] & \mathrm{Cos}[\gamma] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\beta] & 0 & -\mathrm{Sin}[\beta] \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{Sin}[\beta] & 0 & \mathrm{Cos}[\beta] \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Cos}[\alpha] & -\mathrm{Sin}[\alpha] \\ 0 & \mathrm{Sin}[\alpha] & \mathrm{Cos}[\alpha] \end{pmatrix}$$

=

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\beta]\,\mathrm{Cos}[\gamma] & -\mathrm{Cos}[\gamma]\,\mathrm{Sin}[\alpha]\,\mathrm{Sin}[\beta]-\mathrm{Cos}[\alpha]\,\mathrm{Sin}[\gamma] & -\mathrm{Cos}[\alpha]\,\mathrm{Cos}[\gamma]\,\mathrm{Sin}[\beta]+\mathrm{Sin}[\alpha]\,\mathrm{Sin}[\gamma] \\ \mathrm{Cos}[\beta]\,\mathrm{Sin}[\gamma] & \mathrm{Cos}[\alpha]\,\mathrm{Cos}[\gamma]-\mathrm{Sin}[\alpha]\,\mathrm{Sin}[\beta]\,\mathrm{Sin}[\gamma] & -\mathrm{Cos}[\gamma]\,\mathrm{Sin}[\alpha]-\mathrm{Cos}[\alpha]\,\mathrm{Sin}[\beta]\,\mathrm{Sin}[\gamma] \\ \mathrm{Sin}[\beta] & \mathrm{Cos}[\beta]\,\mathrm{Sin}[\alpha] & \mathrm{Cos}[\alpha]\,\mathrm{Cos}[\beta] \end{pmatrix}$$

Sei $\left(\vec{a} := \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}\right)$, a, b, c $\in \mathbb{Z}$, ein Kanten-Dreibein des Quaders in der Grundposition und seien $D\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ die gedrehten Kanten:

(1) - (3): $$D\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,\mathrm{Cos}[\beta]\,\mathrm{Cos}[\gamma] \\ a\,\mathrm{Cos}[\beta]\,\mathrm{Sin}[\gamma] \\ a\,\mathrm{Sin}[\beta] \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

(4) - (6): $$D\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\,(-\mathrm{Cos}[\gamma]\,\mathrm{Sin}[\alpha]\,\mathrm{Sin}[\beta] - \mathrm{Cos}[\alpha]\,\mathrm{Sin}[\gamma]) \\ b\,(\mathrm{Cos}[\alpha]\,\mathrm{Cos}[\gamma] - \mathrm{Sin}[\alpha]\,\mathrm{Sin}[\beta]\,\mathrm{Sin}[\gamma]) \\ b\,\mathrm{Cos}[\beta]\,\mathrm{Sin}[\alpha] \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{pmatrix}$$

(7) - (9): $$D\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,(-\mathrm{Cos}[\alpha]\,\mathrm{Cos}[\gamma]\,\mathrm{Sin}[\beta] + \mathrm{Sin}[\alpha]\,\mathrm{Sin}[\gamma]) \\ c\,(-\mathrm{Cos}[\gamma]\,\mathrm{Sin}[\alpha] - \mathrm{Cos}[\alpha]\,\mathrm{Sin}[\beta]\,\mathrm{Sin}[\gamma]) \\ c\,\mathrm{Cos}[\alpha]\,\mathrm{Cos}[\beta] \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} z_7 \\ z_8 \\ z_9 \end{pmatrix}.$$

Da die Ecken des gedrehten Quaders wieder Gitterpunkte sein sollen, sind die Koordinaten der Ecken ganzzahlig: $z_i \in \mathbb{Z}$. Die isometrischen Drehgleichungen

(1) - (9) implizieren 3 weitere Gleichungen:

(10): $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = a^2$
(11): $z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 = b^2$
(12): $z_7^2 + z_8^2 + z_9^2 = c^2$.

Wir wählen gemäss (10) Zahlen z_1, z_2, z_3, a als Pythagoräisches Zahlenquadrupel. Nach einem Satz von Fermat ist eine solche Wahl für jedes $a \in \mathbb{N}$ möglich.
Konkret erzeugt man pythagoräische Quadrupel wie folgt:

$z_1 = m^2 + n^2 - (p^2 + q^2)$
$z_2 = 2\,(mp + nq)$
$z_3 = 2(np - mq)$.
Dann ist $a = m^2 + n^2 + p^2 + q^2$ und somit $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = a^2$.

Aus (1) - (3) folgt:

$$\sin\beta = \frac{z_3}{a};\ \cos\beta = \frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}{a};\ \sin\gamma = \frac{z_2}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}};\ \cos\gamma = \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}$$

Die Gleichungen (4) - (9) nehmen dann folgende Gestalt an:

$$(4):\ z_4 = \frac{-z_1\, z_3\, b \sin\alpha}{a\sqrt{z_1^2+z_2^2}} - \frac{z_2\, b \cos\alpha}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}} \qquad (5):\ z_5 = \frac{z_1\, b \cos\alpha}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}} - \frac{z_2\, z_3\, b \sin\alpha}{a\sqrt{z_1^2+z_2^2}}$$

$$\mathbf{(6):}\ \boldsymbol{z_6 = \frac{b\sqrt{z_1^2+z_2^2}\,\sin\alpha}{a}} \qquad (7):\ z_7 = \frac{-z_1\, z_3\, c \cos\alpha}{a\sqrt{z_1^2+z_2^2}} + \frac{z_2\, c \sin\alpha}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}$$

$$(8):\ z_8 = \frac{-z_1\, c \sin\alpha}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}} - \frac{z_2\, z_3\, c \cos\alpha}{a\sqrt{z_1^2+z_2^2}} \qquad \mathbf{(9):}\ \boldsymbol{z_9 = \frac{c\sqrt{z_1^2+z_2^2}\,\cos\alpha}{a}}$$

(6) und (9) können wir am einfachsten nach sin(α) bzw. cos(α) auflösen:

$$\sin\alpha = \frac{z_6\, a}{b\sqrt{z_1^2+z_2^2}} =: \frac{u}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}} \qquad \text{und}$$

$$\cos\alpha = \frac{z_9\, a}{c\sqrt{z_1^2+z_2^2}} =: \frac{v}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}$$

Wegen $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ folgt $u^2 + v^2 = z_1^2 + z_2^2$ ($\Longrightarrow$ $v = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 - u^2}$), d.h. u und v bilden ebenfalls eine Zerlegung von $z_1^2 + z_2^2$ in eine Summe von zwei Quadraten.

Insbesondere ist $u = z_1$ und $v = z_2$ eine mögliche Wahl, welche den trigonometrischen Pythagoras respektiert, ev. existieren aber auch weitere Zerlegungen. Aufgrund der Definition sind $u, v \in \mathbb{Q}$.

Wir setzen $\sin\alpha = \frac{u}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}$ und $\cos\alpha = \frac{v}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}$ in (4) - (9) ein und erhalten

$$(4'):\ z_4 = \frac{-b\,(z_1\, z_3\, u + z_2\, a\, v)}{a(z_1{}^2 + z_2{}^2)};$$

$$(5'):\ z_5 = \frac{b\,(z_1\, a\, v - z_2\, z_3\, u)}{a(z_1{}^2 + z_2{}^2)};$$

$$(6'):\ z_6 = \frac{b\,u}{a}$$

$$(7'):\ z_7 = \frac{c\,(-z_1\, z_3\, v + z_2\, a\, u)}{a(z_1{}^2 + z_2{}^2)}$$

$$(8'):\ z_8 = \frac{-c\,(z_1\, a\, u + z_2\, z_3\, v)}{a(z_1{}^2 + z_2{}^2)}$$

$$(9'):\ z_9 = \frac{c\,v}{a}$$

Dies sind nun bereits wurzelfreie Gleichungen.

Vorgehen zur Berechnung diophantischer Quader

1. Wahl von a $\in \mathbb{N}$ mit $z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 = a^2$. Zu a $\in \mathbb{N}$ existiert stets eine solche Wahl.

2. Wahl von u, v mit $u^2 + v^2 = z_1{}^2 + z_2{}^2$ (z.B. u = z_1, v = z_2).

3. (4') - (9') liefern wurzelfreie z_4 bis z_9 mit Parametern b und c $\in \mathbb{N}$.

4. b und c so wählen, dass die Nenner verschwinden.

Programm mit Spezialfall u = z_1 und v = z_2 zur Erzeugung diophantischer Quader (Programm *mathematica*)

Anleitung: Man wähle m, n, p und q. Das ergibt das pythagoräische Quadrupel z_1, z_2, z_3 und a. Die Vektorkoordinaten z_4 bis z_9 beinhalten noch die Variablen b und c (man setze zunächst z.B. b = c = 1), sowie allenfalls einen Nenner. Man wähle nach einem Durchlauf des Programms b und c so, dass alle Nenner verschwinden. Das Resultat sind die Koordinaten eines diophantischen Quaders. Hier ein **Beispiel**:

```
m := 3
n := 1
p := 2
q := 1
z1 := m^2 + n^2 - p^2 - q^2; z2 := 2 (m p + n q); z3 := 2 (n p - m q)
a := m^2 + n^2 + p^2 + q^2
u := z1; v := z2

b := 39
c := 195

z4 := -b (z1 z3 u + z2 a v) / (a (z1^2 + z2^2))
z5 := b (z1 a v - z2 z3 u) / (a (z1^2 + z2^2)); z6 := b u / a
z7 := c (-z1 z3 v + z2 a u) / (a (z1^2 + z2^2))
z8 := -c (z1 a u + z2 z3 v) / (a (z1^2 + z2^2)); z9 := c v / a
```

$$x := \mathrm{MatrixForm}\left[\begin{pmatrix} z1 \\ z2 \\ z3 \end{pmatrix}\right];\ y := \mathrm{MatrixForm}\left[\begin{pmatrix} z4 \\ z5 \\ z6 \end{pmatrix}\right];\ z := \mathrm{MatrixForm}\left[\begin{pmatrix} z7 \\ z8 \\ z9 \end{pmatrix}\right]$$

```
result1 = {x, y, z}
```

$$\mathrm{result2} = \left\{\sqrt{z1^2 + z2^2 + z3^2},\ \sqrt{z4^2 + z5^2 + z6^2},\ \sqrt{z7^2 + z8^2 + z9^2}\right\}$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -34 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 70 \\ 1 \\ 182 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\{15, 39, 195\}$$

Obiges Dreibein erzeugt einen Quader mit Ecken auf ganzzahligen Gitterpunkten und ganzzahligen Kantenlängen 15, 39 und 195.

Weitere Beispiele

Die folgenden Beispiele wurden gemäss obigem Programm mit *mathematica* erzeugt. In einem ersten Durchgang wurden b und c gleich 1 gesetzt, in einem zweiten Durchgang wurden b und c so gewählt, dass die auftretenden Brüche verschwanden.

Man verifiziere:
Die drei Vektoren des Kantendreibeins müssen je senkrecht aufeinander stehen, ganzzahlig sein und ganzzahlige Längen haben.

a) $\begin{pmatrix} -8 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -29 \\ -28 \\ -20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -28 \\ 4 \\ 35 \end{pmatrix}$ mit Kantenlängen 18, 45, 45.

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 22 \\ -20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -71 \\ 22 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 22 \\ 46 \\ 55 \end{pmatrix}$ mit Kantenlängen 30, 75, 75

c) $\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -26 \\ 18 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ 1 \\ 30 \end{pmatrix}$ mit Kantenlängen 28, 35, 35

d) $\begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$ mit Kantenlängen 22, 11, 11

e) $\begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 20 \end{pmatrix}$ mit Kantenlängen 25, 25, 25, also ein diophantischer Würfel.

f) $\begin{pmatrix} 10 \\ 28 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -46 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 70 \\ -59 \\ 238 \end{pmatrix}$ mit Kantenlängen 30, 51, 255