Ein Set primitiver, orthogonaler Idempotente der Würfelgruppenalgebra

Die reguläre Darstellung einer Gruppe:
Die Gruppe G kann auch auf sich selber einwirken, indem ein Element g von links auf alle Gruppenelemente einwirkt und so die Gruppenelemente permutiert. g entspricht dann im Beispiel der Würfeldrehgruppe eine 24x24-Permutationsmatrix, wenn als Basiselemente alle Gruppenelemente (in einer fest gewählten Reihenfolge) verwendet werden.
Der darstellende Vektorraum V besteht also aus allen Linearkombinationen der Gruppenelemente.

Durch das auf der Homepage beschriebene Verfahren mit der «Gruppenmatrix» entstehen nicht weiter zerlegbare, zueinander orthogonale idempotente Elemente e_i.
Die Gruppenalgebra R der Würfeldrehgruppe bzw. der Vektorraum V wird durch diese Idempotente zerlegt in eine direkte Summe von G-invarianten, irreduziblen Teilräumen:

$$R = Re_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3 \oplus Re_4 \oplus Re_5 \oplus Re_6 \oplus Re_7 \oplus Re_8 \oplus Re_9 \oplus Re_{10}$$

Die 5 Farben geben die 5 Isomorphietypen der irreduziblen Darstellungen an. Gleichfarbige Summanden ergeben isomorphe Darstellungen. Addieren wir die Dimensionen der Teilräume: $1 + 1 + (2 + 2) + (3 + 3 + 3) + (3 + 3 + 3) = 24 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 24 =$ Dimension der regulären Darstellung.

$e_1 =$
(id+z2+x2+y2+z1+z3+x1+x3+y1+y3+a1+a2+b1+b2+c1+c2+d1+d2+k1+k2+k3+k4+k5+k6)/24

$e_2 =$ (id+z2+x2+y2+a1+a2+b1+b2+c1+c2+d1+d2-z1-z3-x1-x3-y1-y3-k1-k2-k3-k4-k5-k6)/24

$e_3 =$ (id+z2+x2+y2+y1+y3+k1+k3-x1-x3-a2-b1-c2-d1-k2-k4)/12
$e_4 =$ (id+z2+x2+y2+x1+x3+k2+k4-y1-y3-a1-b2-c1-d2-k1-k3)/12

$e_5 =$ (id+x2+x1+x3-z2-y2-k2-k4)/8
$e_6 =$ (id+y2+y1+y3-z2-x2-k1-k3)/8
$e_7 =$ (id+z2+z1+z3-x2-y2-k5-k6)/8

$e_8 =$ (id+b1+b2+k3+k4+k5-y2-z3-x1-c1-d1-k1)/8
$e_9 =$ (id+c1+c2+k1+k4+k6-z2-x3-y3-b1-d2-k5)/8
$e_{10} =$ (id+d1+d2+k1+k2+k5-x2-z1-y1-b2-c2-k4)/8

Die Summe aller e_i ergibt id = Ring-Eins.
Summe der "gleichfarbigen» e_i :
$E_1 := e_1$
$E_2 := e_2$
$E_3 := e_3+e_4$
$E_4 := e_5+e_6+e_7$
$E_5 := e_8+e_9+e_{10}$
Die E_i enthalten mit einem Gruppenelement die ganze Konjugationsklasse dieses Elements, sind also Elemente des Zentrums. Man zeigt sogar: Die E_i bilden eine Basis des Zentrums der Würfelgruppenalgebra.

Basis für eine Darstellung mit 10x10-Blockmatrizen
Aus jeder Farbe (d.h. zu jedem Isomorphie-Typ) wählen wir *ein* e_i und weitere linear unabhängige Basiselemente, welche uns von der «Gruppenmatrix» direkt geliefert werden:

$(e_1, e_2, e_3, z_1e_3, e_5, z_3e_5, y_1e_5, e_8, a_1e_8, a_2e_8)$

Lassen wir die Elemente g der Würfeldrehgruppe von links auf diese Basiselemente wirken, entstehen 10x10-Blockmatrizen, da die Elemente g auf jedem Re_i abgeschlossen wirken.

Die e_i haben in dieser Darstellung eine Matrix, die nur an der i-ten Diagonalstelle eine 1 und sonst lauter Nullen hat.

Wir geben drei Beispiele für Darstellungsmatrizen in dieser Basis, nämlich die Matrizen zu x2, z1 und a1:

$$\mathtt{mx2} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathtt{mz1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathtt{ma1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Man sieht die 5 Blöcke.

Die übrigen Elemente der Würfeldrehgruppe lassen sich aus diesen drei Elementen herstellen:

id	${z_1}^2=z_2$	x_2	${z_1}^2 x_2=y_2$	$:N_4$
a_1	${z_1}^2 a_1=d_2$	$x_2 a_1=b_2$	${z_1}^2 x_2 a_1=c_1$	
${a_1}^2=a_2$	${z_1}^2 {a_1}^2=b_1$	$x_2 {a_1}^2=c_2$	${z_1}^2 x_2 {a_1}^2=d_1$	:Tetraedergrp.N_{12}
z_1	${z_1}^2 z_1=z_3$	$x_2 z_1=k_6$	${z_1}^2 x_2 z_1=k_5$	
$a_1 z_1=k_1$	${z_1}^2 a_1 z_1=y_1$	$x_2 a_1 z_1=y_3$	${z_1}^2 x_2 a_1 z_1=k_3$	
${a_1}^2 z_1= x_3$	${z_1}^2 {a_1}^2 z_1=k_2$	$x_2 {a_1}^2 z_1=x_1$	${z_1}^2 x_2 {a_1}^2 z_1=k_4$	:Würfelgruppe