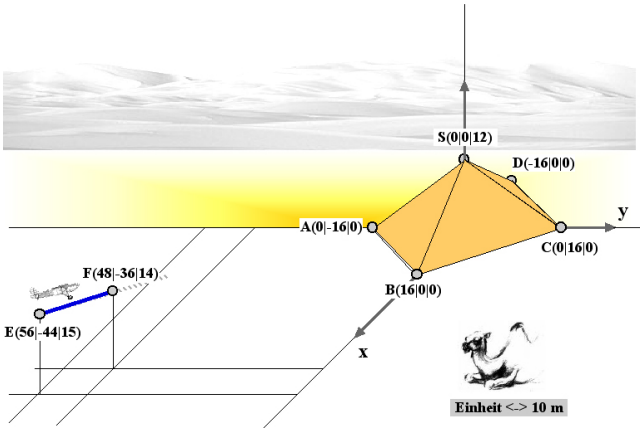
Urs Vonesch

Skript Mathematik Berufsmaturitätsschule Zürich

Technisches Profil

Vektorgeometrie 1. Teil

Anwendungsbereiche: z.B. GPS, Physik, Flugsicherung, Grafik, ...
Erfinder: Hermann Grassmann (1809 - 1877).
Ohne eine einzige Mathematikvorlesung besucht zu haben, erfand Grassmann 1844 die Vektoren.



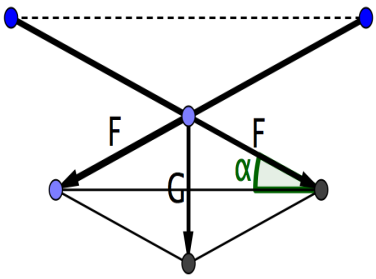


Bild links: Fliegt das Flugzeug vor oder hinter der Pyramide vorbei? (Wichtig für GPS, Flugsicherung und echt wirkende Computerspiele.) Bild rechts: Ein Scheinwerfer (Gewicht G = 200 N) hängt an zwei Drahtseilen. Der Winkel α sei 5°.Wie gross sind die Zugkräfte F in den Seilen?

1. Der Erfinder der Vektoren

Von Sabine Wienand; FAZ,14.09.2009

Ein Universalgenie mit Blick für Strukturen: Hermann Graßmann (1809 bis 1877)

Hermann Günther Graßmann war kein Wunderkind. Während sein berühmter Kollege Leonard Euler schon mit 13 Jahren die Universität besuchte, ließ der am selben Tag, aber 102 Jahre später geborene Graßmann in diesem Alter keinen Funken von Begabung für irgendetwas erkennen. In schlafwandlerischer Untätigkeit, voll leerer Träume wuchs der Sohn eines Stettiner Gymnasiallehrers für Mathematik heran. Nichts, rein gar nichts blieb in seinem Geist haften. Selbst der Vater machte sich irgendwann keine Illusionen mehr. Später hat Graßmann beschrieben, wie gütig der von pestalozzischer Pädagogik geprägte Papa dem anscheinend so talentfreien Sohn stets versichert habe, er werde es gleichmütig ertragen, wenn Hermann einst Gärtner werden würde - solange er nur einem seinen Fähigkeiten gemäßen Beruf zum Nutzen der Menschen nachgehe.

Es sollten dann gleich mehrere Berufungen werden (...): Mathematiker, Physiker, Theologe, Philosoph und Indologe. (...)

Tatsächlich hat der erwachsene Graßmann den Beruf seines Vaters

ergriffen und ist Lehrer geworden. Darüber hinaus aber hat er die Vektorrechnung begründet, Entdeckungen in der Elektrizitätslehre, der Farbenlehre und der Vokaltheorie gemacht. Ein Pionier der Sanskrit-Philologie ist Graßmann auch noch gewesen. Er war zwar bereits vierzig, als er begann, diese klassische Sprache des alten Indien zu lernen, verfasste aber das bis heute maßgebliche Sanskritwörterbuch der altindischen Götterhymnen des Rigveda. Das pommersche Provinzgenie muss heute zu den großen Gelehrten des 19. Jahrhunderts gezählt werden.

Wie kam es dazu? Es muss um die Zeit seiner Konfirmation gewesen sein, als Graßmanns Geist erwachte, nicht von allein, sondern weil er plötzlich den Entschluss fasste, "den dem Geist anhaftenden Unflat zu tilgen und auszurotten". Erstaunt stellte er fest: "Wenn ich etwa den Geist beharrlich auf eine Sache richtete, pflegte ich sie schneller als erwartet zu erfassen." (...)

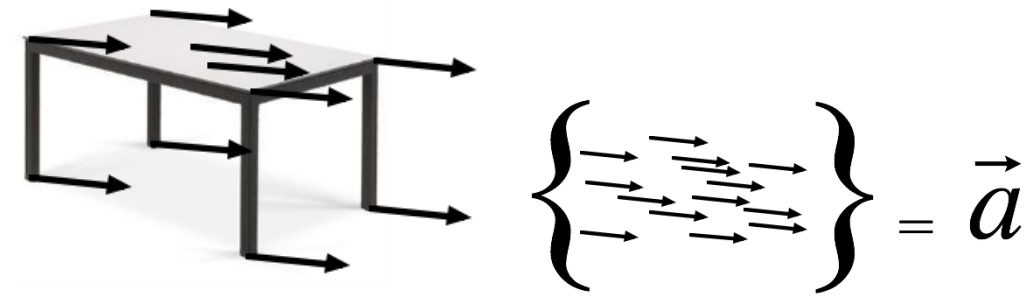
Drei Jahre hatte der aus einer alten Stettiner Pastorenfamilie stammende Graßmann in Berlin Theologie studiert, das letzte Semester dann aber der Philosophie gewidmet. (...) Er lernte, wie Widersprüche entfaltet werden müssen, wie man Wissen erzeugt. Und seine bevorzugte Form, Wirklichkeit zu fassen, fand er in der Mathematik. Dort gelingt ihm, schlichten Schulstoff konsequent weiterdenkend, seine bahnbrechende "Ausdehnungslehre", eine völlig neue algebraische Theorie räumlicher Größen (siehe: "Rechnen mit Räumen").

Zuvor schon hat er sich entschieden, statt Landpfarrer lieber Mathematiklehrer in Stettin zu werden. Obwohl er an der Universität keine einzige Mathematikvorlesung gehört hatte, gehört dem Steckenpferd seine ganze Liebe: "Noch schwankend, wofür ich mich entscheiden sollte, wurde ich durch eine Reihe von Entdeckungen in ein noch von keinem betretenes Gebiet der Mathematik hineingezogen. Es trat mir eine ganz neue mathematische Methode entgegen, durch die sich oft die schwierigsten Probleme mit überraschender Leichtigkeit lösen ließen", schreibt er 1847.

Dieser beschränkten, aber für den Teilzeitgelehrten Graßmann fruchtbaren Umgebung dürfte zuzuschreiben sein, dass zeitgenössische Mathematiker, denen er sein Opus Magnum, die "Ausdehnungslehre", übersandte, kopfschüttelnd davor saßen. Möbius störten die philosophischen Betrachtungen und fehlenden Formeln, Richard Baltzer bekannte, es werde ihm bei der Lektüre "himmelblau vor Augen", Gauß gab vor, zu beschäftigt zu sein, um sich mit Graßmanns wunderlicher Wortwahl zu familiarisieren.
Das Buch fand folgerichtig weder Rezensenten noch Käufer. Eine radikale Überarbeitung, die 1862 erschien, war dann zwar philosophiebereinigt, in der Darstellung aber derart modern, dass die "Ausdehnungslehre" abermals auf Unverständnis stieß. Gut dreißig Jahre war Graßmann seiner Zeit voraus, doch wurde vieles, was er bereits gedacht hatte, nochmals neu entwickelt - man hatte ihn und seine Terminologie einfach nicht verstanden. So blieb ihm sein sehnlichster Wunsch, eine Universitätsprofessur für Mathematik, versagt.

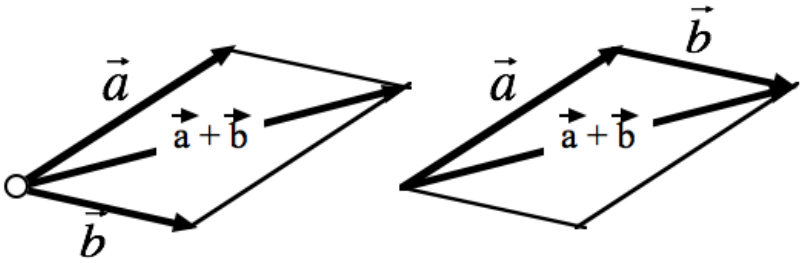
In seinem Hauptberuf als Lehrer scheint er von manchen seiner Schüler immerhin eine gewisse Anerkennung erfahren zu haben. Richard von Garbe etwa wurde, von Graßmann inspiriert, ein maßgeblicher Indologe seiner Zeit. Andere dürften ihn als eigen empfunden haben, wenn er etwa im größten Tohuwabohu auf dem Tisch kniete und in vollem Ernst laut zu Gott betete, er möge die Störenfriede zur Vernunft bringen. Zu Hause hielt ihm seine Frau erfolgreich elf Kinder vom Leib; sie wurden dem Vater nur vorgeführt, wenn dieser sein von Pfeifenrauch verqualmtes Studierzimmer zur nachmittäglichen Kaffeepause kurz verliess.

2. Begriff des Vektors, Addition, Subtraktion, Streckung von Vektoren



Ein Vektor ist eine ganze Klasse von "Pfeilen" gleicher Länge und gleicher Richtung. Ein aus dieser Klasse einzeln herausgegriffener Pfeil heisst Repräsentant dieser Klasse.

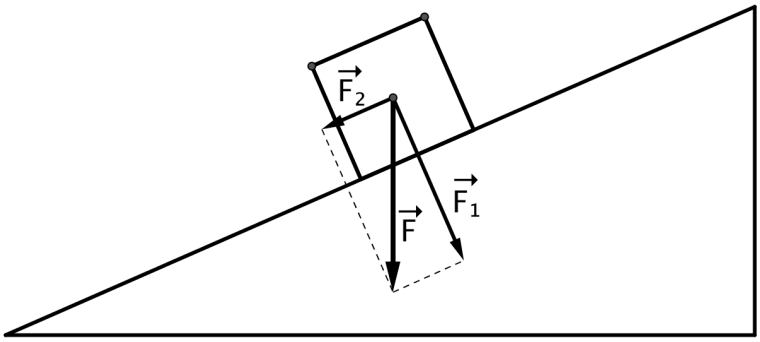
Der Einfachheit halber beschriften wir auch einzelne Repräsentanten mit dem Vektorsymbol $\vec{a}$. Dabei denken wir uns diesen Pfeil frei parallel verschiebbar.
Wir sagen kurz und prägnant: Vektoren sind frei.



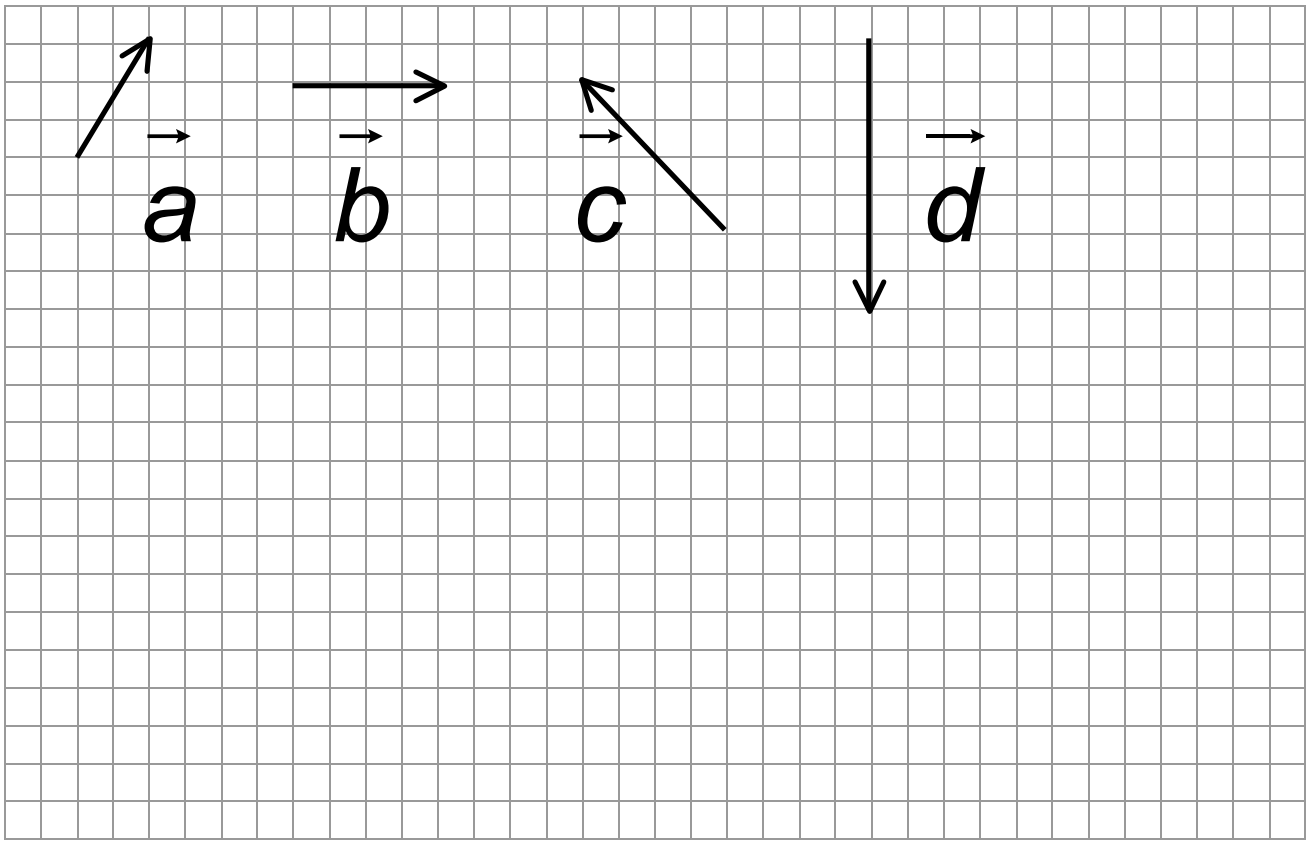
Links: Kräfteaddition in der Physik: Parallelogrammmethode.
Rechts: Addition freier Vektoren durch Aneinanderfügen.

Zerlegung einer Kraft

Die Gewichtskraft $\vec{F}$ wird an der schiefen Ebene „zerlegt“: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.



Addition, Subtraktion und Streckung von Vektoren



Aufgaben zur Addition und Subtraktion von Vektoren

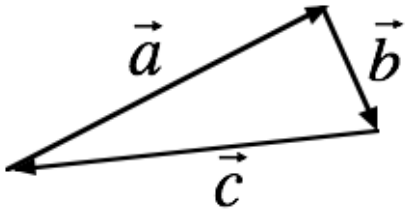
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Zeichnen Sie

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} - \vec{b}$ c) $\vec{a} + 2\vec{b}$ d) $\vec{a} - 3\vec{b}$

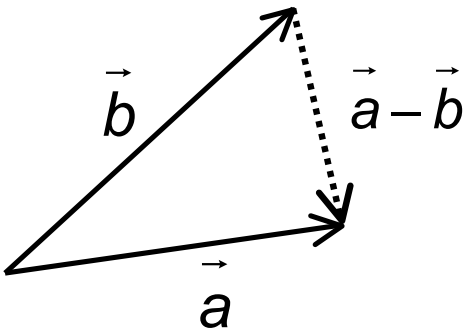
e) $-2\vec{a}$ f) $3\vec{d} - 2\vec{a} + 5\vec{b}$

Der Nullvektor $\vec{0}$:

Im Bild unten links ergeben $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ den Nullvektor $\vec{0}$.



Subtraktion von Vektoren:



Zusammenfassung

- Vektoren addiert man durch Aneinanderhängen.
- Vektoren subtrahiert man durch Addition des Gegenvektors.
- Vektoren können gestreckt oder gestaucht werden: $k \cdot \vec{a}$. k ist der Streckfaktor.
- Vektor zwischen Punkt A und Punkt B: $\overrightarrow{AB}$
- Vektor zwischen Punkt B und Punkt A: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Aufgaben (vgl. Frommenwiler, S. 180 ff.)

1. In einem Rechteck ABCD sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.
   Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke mit Hilfe einer Figur:
   a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ b) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ c) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ d) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

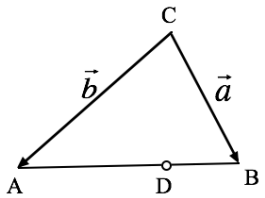
2. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:
   a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{UV}+\overrightarrow{VW}$ c) $\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YX}$ d) $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{ED}$

   e) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$ f) $\overrightarrow{UV}+\overrightarrow{VW}+\overrightarrow{WZ}$ g) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}-\overrightarrow{SR}$ h) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$

   i) $\overrightarrow{UY}-\overrightarrow{XY}-\overrightarrow{UX}$

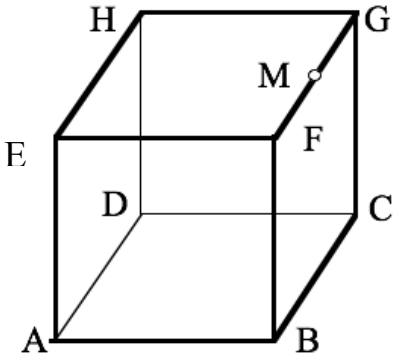
3. Zeichnen Sie ein Parallelogramm ABCD mit Diagonalenschnittpunkt M.
   Setzen Sie $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{CM}$.
   Drücken Sie folgende Vektoren durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus:
   a) $\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AM}$ c) $\overrightarrow{DM}$ d) $\overrightarrow{AB}$ e) $\overrightarrow{CD}$

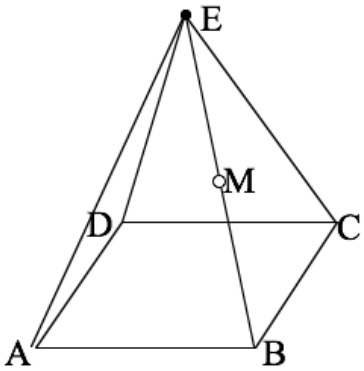
4. Es gilt $\overline{AD}:\overline{DB}=2:1$. Bestimmen Sie $\overrightarrow{DB}$ und $\overrightarrow{DC}$ aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



5. Ein allgemeines Dreieck ABC ist durch $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ und $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ gegeben. S sei der Schwerpunkt des Dreiecks.
   a. Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ und $\overrightarrow{SC}$ durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.
   b. Bestimmen Sie $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$.

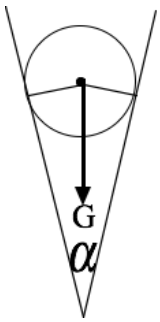
6. **Linkes Bild:** K sei der Schnittpunkt der Körperdiagonalen des Würfels. M ist der Mittelpunkt der Kante FG. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}=\overrightarrow{BC}, \vec{c}=\overrightarrow{AE}$.
   Drücken Sie folgende Vektoren durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus:
   $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{MK}, \overrightarrow{CK}$





   Rechtes Bild: Die Pyramide ABCDE hat eine rechteckige Grundfläche. M ist der Mittelpunkt der Kante BE. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}=\overrightarrow{BC}, \vec{c}=\overrightarrow{AE}$.
   Drücken Sie folgende Vektoren durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus: $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}$.

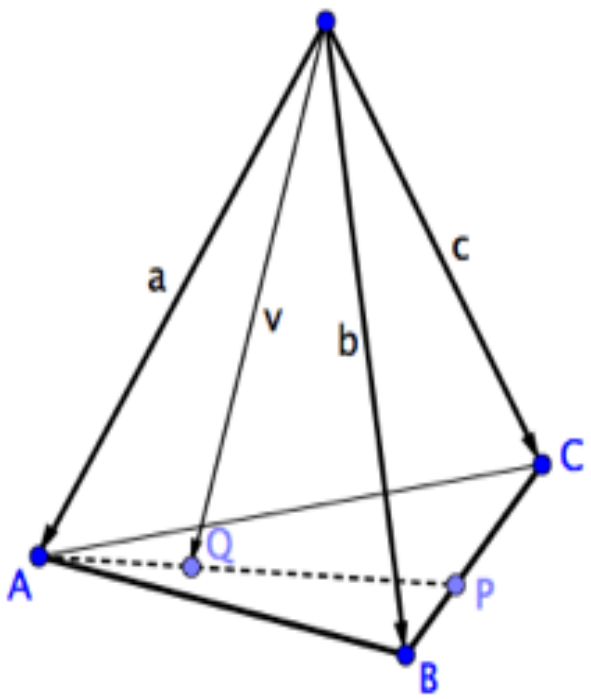
7. Eine Kugel mit Gewicht G sitzt in einem symmetrischen Spalt (Figur rechts). Wie gross sind die Kräfte, welche die Kugel senkrecht auf die Spaltwände ausübt, ausgedrückt durch G und α?



8. Man hat 3 Punkte: A, B und C. Welche Vektorbedingung gilt, wenn die drei Punkte auf derselben Geraden liegen?

9. Eine Strecke AB wird durch einen Punkt U geteilt, so dass gilt: $\overline{AU}:\overline{UB}=7:3$.
   Drücken Sie $\overrightarrow{BU}$ durch $\overrightarrow{AB}$ aus.

10. **Maturaufgabe**



Gegeben sind eine dreiseitige Pyramide ABCD und die Punkte P und Q. Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ *und* $\vec{c}$ sind gegeben.
P teilt die Strecke BC im Verhältnis $\overline{BP}:\overline{PC}=4:5$.
Q teilt die Strecke AP im Verhältnis $\overline{AP}:\overline{QP}=1:2$.

a) Drücken Sie $\overrightarrow{BC}$ *und* $\overrightarrow{BP}$ durch die gegebenen Vektoren aus.
b) Drücken Sie $\overrightarrow{AP}$ *und* $\overrightarrow{AQ}$ durch die gegebenen Vektoren aus.
c) Drücken Sie den Vektor $\vec{v}$ durch die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ *und* $\vec{c}$ aus.

Lösungen

$1a.\ 2\vec{b}$ $\quad b.\ 2\vec{a}$ $\quad c.\ \vec{0}$ $\quad d.\ -2\vec{c}$

$2a.\ \overrightarrow{AC}$ $\quad b.\ \overrightarrow{UW}$ $\quad c.\ \vec{0}$ $\quad d.\ \overrightarrow{CE}$ $\quad e.\ \overrightarrow{CB}$

$3a.\ -\vec{a}$ $\quad b.\ -\vec{b}$ $\quad c.\ \vec{a}-\vec{b}$ $\quad d.\ \vec{a}-2\vec{b}$ $\quad e.\ 2\vec{b}-\vec{a}$

$4a.\ \overrightarrow{DC}=-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b};\ \overrightarrow{DB}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

$5a.\ \overrightarrow{SA}=-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b};\ \overrightarrow{SB}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b};\ \overrightarrow{SC}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

$5b.\ \vec{0}$

$6a.\ \vec{a}+\vec{c};\ \vec{a}+0.5\vec{b}+\vec{c};\ -0.5\vec{b}+\vec{c};\ 0.5\vec{a}+0.5\vec{b}+0.5\vec{c}$
$-0.5\vec{a}-0.5\vec{c};\ -0.5\vec{a}-0.5\vec{b}+0.5\vec{c}$

$6b.\ 0.5\vec{c}-0.5\vec{a};\ \vec{b}-0.5\vec{c}+0.5\vec{a};\ \vec{b}-0.5\vec{a}-0.5\vec{c}$

$7.\ F_n=\dfrac{G}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.\quad Beispiel: G=100\text{N}, \alpha=10° \Rightarrow F_N\approx 573.7\text{N}$

Die Seitenkräfte sind also ein Vielfaches der Gewichtskraft: Keil-Effekt. Mit relativ wenig Kraftaufwand lässt sich somit der Keil aufbrechen.
Bei der vektoriellen Zerlegung können also die „Teilkräfte“ grösser sein als die Vektorsumme.

$8.\ \overrightarrow{BC}$ *ist ein* $k-$*faches von* $\overrightarrow{AB}$, *d.h.* $\overrightarrow{BC}=k\cdot\overrightarrow{AB};\ k\in\mathbb{R}$

9. $\overrightarrow{BU} = -0.3\overrightarrow{AB}$

10a. $\overrightarrow{BC} = -\vec{b} + \vec{c};\ \overrightarrow{BP} = \frac{4}{9}\vec{c} - \frac{4}{9}\vec{b}$

10b. $\underline{\underline{\overrightarrow{AP}}} = -\vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{BP} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c} - \frac{4}{9}\vec{b} = \underline{\underline{-\vec{a} + \frac{5}{9}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c}}}$

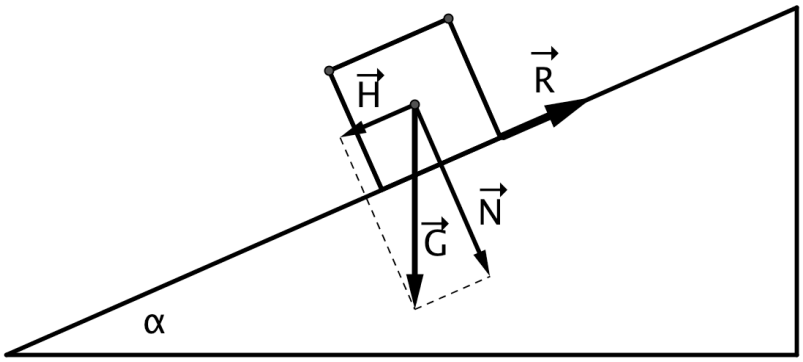
$\underline{\underline{\overrightarrow{AQ}}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AP} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{5}{27}\vec{b} + \frac{4}{27}\vec{c}}}$

10c. $\underline{\underline{\vec{v}}} = \vec{a} + \overrightarrow{AQ} = \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{5}{27}\vec{b} + \frac{4}{27}\vec{c} = \underline{\underline{\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{27}\vec{b} + \frac{4}{27}\vec{c}}}$

---

3. Aufgaben aus der Physik

1. Bestimmung des Reibungskoeffizienten f_h bzw. f_g an der schiefen Ebene:



Die schiefe Ebene sei auf verschiedene Winkel α einstellbar. Wir verändern α so lange, bis

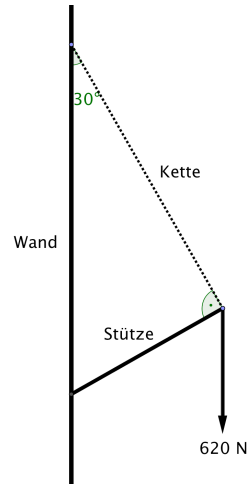
a) der Klotz gerade zu gleiten beginnt.

b) der Klotz mit gleichförmiger Geschwindigkeit gleitet.

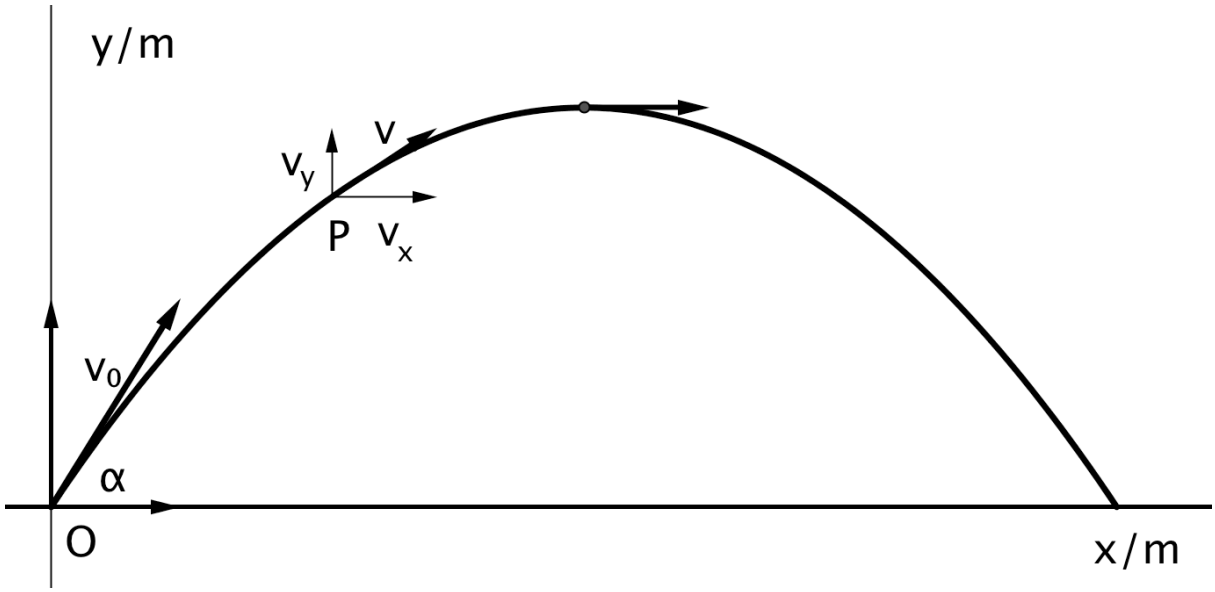
Es ist dann der Betrag der Hangabtriebskraft H gleich dem Betrag der Reibungskraft R. Es gilt $R = f_h \cdot N$ bzw. $R = f_g \cdot N$. (Der Betrag der Reibungskraft ist proportional dem Betrag der Normalkraft N.)
Wie kann der Reibungskoeffizient f aus den Messgrössen G und α bestimmt werden?

2. Ein Schlitten (Masse = 35 kg) wird einen Hang mit Neigungswinkel 20° mit gleichförmiger Geschwindigkeit hinaufgezogen (Gleitreibungskoeffizient f Schlitten / Schnee = 0.3). Mit welcher Kraft in Bewegungsrichtung wird der Schlitten gezogen?

3. Welche Kräfte wirken auf die Kette und auf die Stütze? Runden Sie auf ganze N.



4. Schiefer Wurf



a. Wie lauten die Geschwindigkeitskomponenten von v_0?

b. Bestimmen Sie die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y von $v(t) = v$.

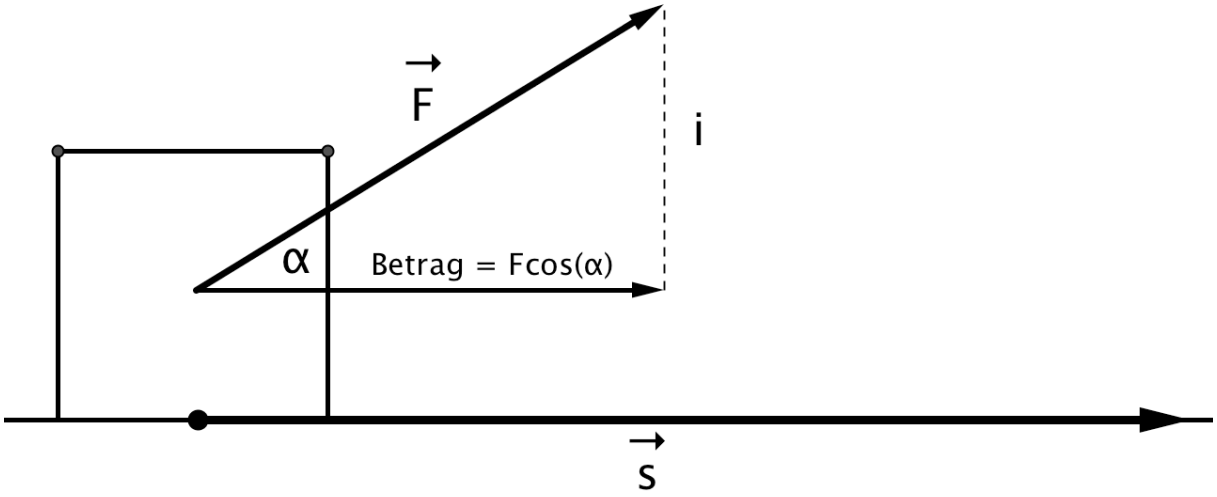
c. Wie lauten die Komponenten des Ortsvektors $\vec{r}$? Dieser läuft von O nach P.

d. Im Scheitel ist $v_y = 0$. Drücken Sie die Flugzeit bis zum Scheitel durch v_0 und α aus. Ebenso: Flugzeit bis zur Landung.

e. Drücken Sie mit Hilfe des Resultats von d. die Flugweite (Strecke von O bis zum Landepunkt) durch v_0 und α aus.

f. Für welchen Winkel α wird die Flugweite maximal? (Für welchen Winkel wird der Wert von $\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ maximal?)

5. Arbeit = Kraft in Wegrichtung mal Weg: **Skalarprodukt von Vektoren**



Ein Schlitten wird mit der Kraft $\vec{F}$ um den Wegvektor $\vec{s}$ verschoben (siehe Bild). Massgebend für die verrichtete Arbeit W ist lediglich die Kraftkomponente in Wegrichtung.
Drücken Sie die verrichtete Arbeit durch *F, s* und α aus.

Skalarprodukt zweier Vektoren:
Ein Ausdruck wie oben erhalten: $W = F \cdot s \cdot \cos(\alpha)$ taucht in physikalischen Formeln häufig auf. Er wird deshalb abgekürzt als sogenanntes **Skalarprodukt** geschrieben:

$$F \cdot s \cdot \cos(\alpha) = \underline{\underline{\vec{F} \cdot \vec{s}}}$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist eine Zahl (ein Skalar) und ist definiert als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\alpha),$$

dabei ist α der Winkel zwischen den beiden Vektoren.

Das Resultat obiger Aufgaben können wir also kurz so notieren: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

6. Wie gross ist in der Situation des Bildes oben die verrichtete Arbeit, wenn gilt: $F = 180\text{ N}, \alpha = 32°, s = 50\text{ m}$?

7. Ein Gefährt (m = 500 kg) fährt beschleunigungsfrei mit v_0 = 10 m / s auf eine ansteigende schiefe Ebene mit Neigungswinkel 30° zu. Der Reibungskoeffizient *f* beträgt 0.1.

   a. Wie gross ist die Bremsverzögerung?

   b. Welche schräge Strecke *s* auf der schiefen Ebene legt das Gefährt zurück und auf welcher Höhe über der Basis der schiefen Ebene kommt das Fahrzeug zum Stillstand?

   c. Wie viel Energie geht durch Reibung verloren?

Lösungen

1.

$$H = G \cdot \sin(\alpha);\ \ R = f \cdot N = f \cdot G \cdot \cos(\alpha)$$

$$H = R \Rightarrow G \cdot \sin(\alpha) = f \cdot G \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \underline{\underline{f}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \underline{\underline{\tan(\alpha)}}$$

2. 183.6 N

3. Kette: Zugkraft von 537 N, Stütze: Druckkraft von 310 N

4.

$a.\ v_0 \cos(\alpha), v_0 \sin(\alpha)$

$b.\ v_x = v_0 \cos(\alpha)$

$v_y = v_0 \sin(\alpha) - g \cdot t$

$c.\ s_x = v_0 \cos(\alpha) \cdot t$

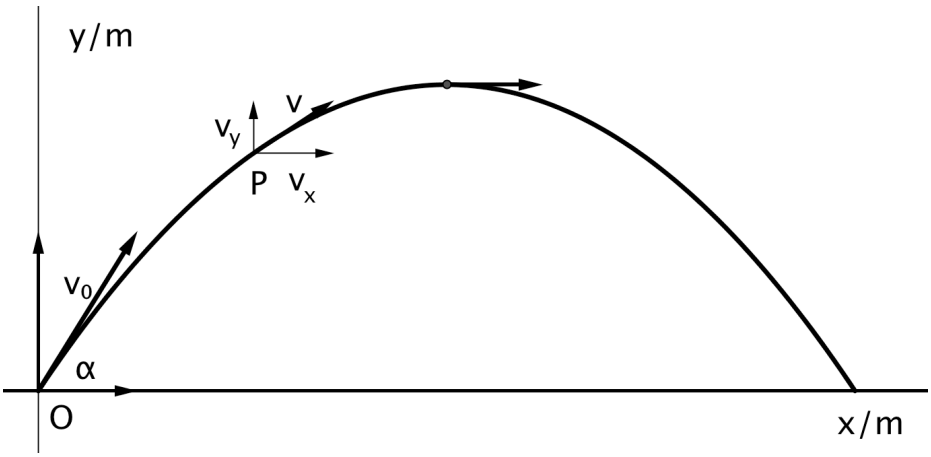
$s_y = v_0 \sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

$d.\ v_y = v_0 \sin(\alpha) - g \cdot t = 0 \Rightarrow v_0 \sin(\alpha) = g \cdot t \Rightarrow t_S = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$

$t_{\text{total bis Landung}} = 2 \cdot t_S = \frac{2 \cdot v_0 \sin(\alpha)}{g}$

$e.\ s = v_0 \cos(\alpha) \cdot t_{\text{total bis Landung}} = \frac{2 \cdot v_0^2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{g}$

$f.$ maximal für $\alpha = 45°$.



6. 7632 J

7.

a. $H = m \cdot g \cdot \sin(30°) = m \cdot g \cdot 0.5$

$N = m \cdot g \cdot \cos(30°) = m \cdot g \cdot 0.5\sqrt{3}$; $R = f \cdot N = f \cdot m \cdot g \cdot 0.5\sqrt{3}$

$H + R = 0.5m \cdot g \cdot \left(1 + f\sqrt{3}\right) \Rightarrow a = \frac{H+R}{m} = 0.5 \cdot g \cdot \left(1 + f\sqrt{3}\right) \approx \underline{\underline{5.75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$

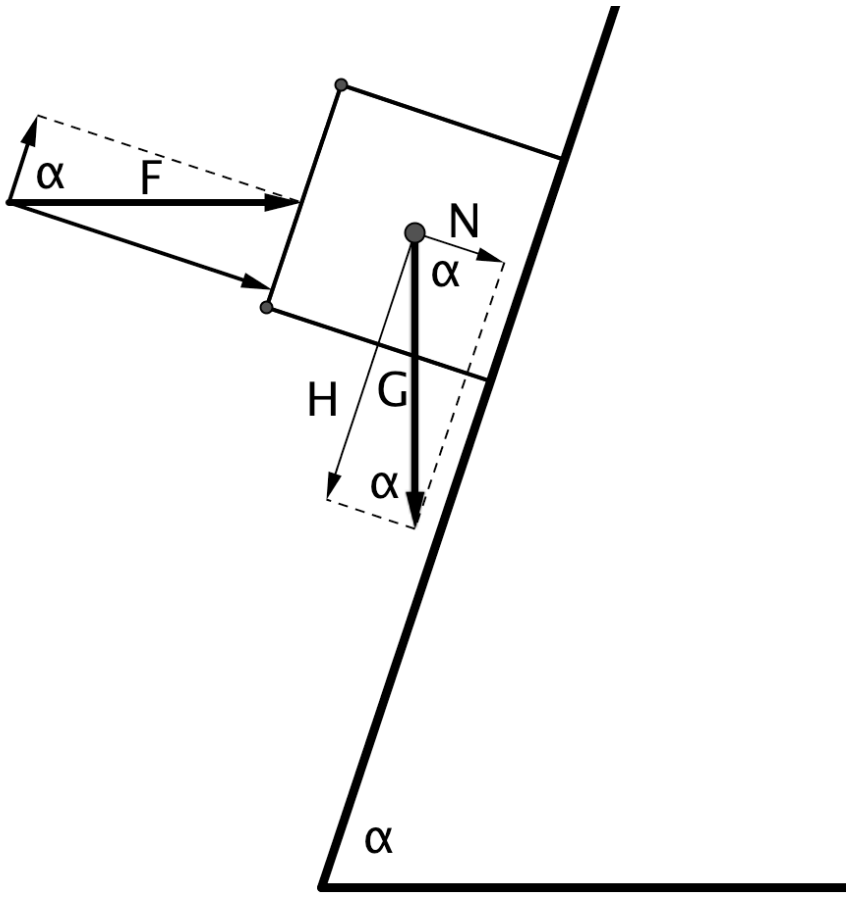
b. $v = v_0 - a \cdot t$. Stillstand: $0 = v_0 - a \cdot t_S \Rightarrow t_S = \frac{v_0}{a} \approx 1.74$ s = Bremsdauer

$s_{\text{schräg bis Stillstand}} = \frac{v_0^{\,2}}{2a} \approx 8.69 \text{ m} \Rightarrow$ Höhe h über Basis $= s_{\text{schräg}} \cdot \sin(30°) \approx \underline{\underline{4.34 \text{ m}}} = h$

c. $W_{\text{Reibung}} = R \cdot s_{schräg} \approx \underline{\underline{3691 \text{ J}}}$ = Energieverlust durch Reibung (geht als Wärme verloren).

---

8. Ein Klotz (Gleitreibungskoeffizient Klotz – Unterlage = f) mit Gewicht G wird mit der horizontalen Kraft der Grösse F an eine schiefe Ebene mit Öffnungswinkel α gedrückt.
Wie gross muss F mindestens sein, damit der Klotz aufwärts gleitet?
Wie gross darf F höchstens sein, damit der Klotz noch abwärts gleitet?



Lösung Nr. 8:

8.
Sei R der Betrag der Reibungskraft, N der Betrag der Normalkraft, H der Betrag der Hang-Abtriebskraft.

$$R = \left(F \cdot \sin\alpha + G \cdot \cos\alpha\right) \cdot f$$
$$H = G \cdot \sin\alpha$$

a. Aufwärts: (Voraussetzung: $\cos\alpha - f\sin\alpha > 0$)

$$F\cos\alpha \geq G\sin\alpha + \left(F\sin\alpha + G\cos\alpha\right) \cdot f$$
$$F\cos\alpha \geq G\sin\alpha + Ff\sin\alpha + Gf\cos\alpha$$
$$F\left(\cos\alpha - f\sin\alpha\right) \geq G\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right) \quad , \text{ sei } \cos\alpha - f\sin\alpha > 0$$
$$\underline{\underline{F \geq \frac{G\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)}{\cos\alpha - f\sin\alpha}}}$$

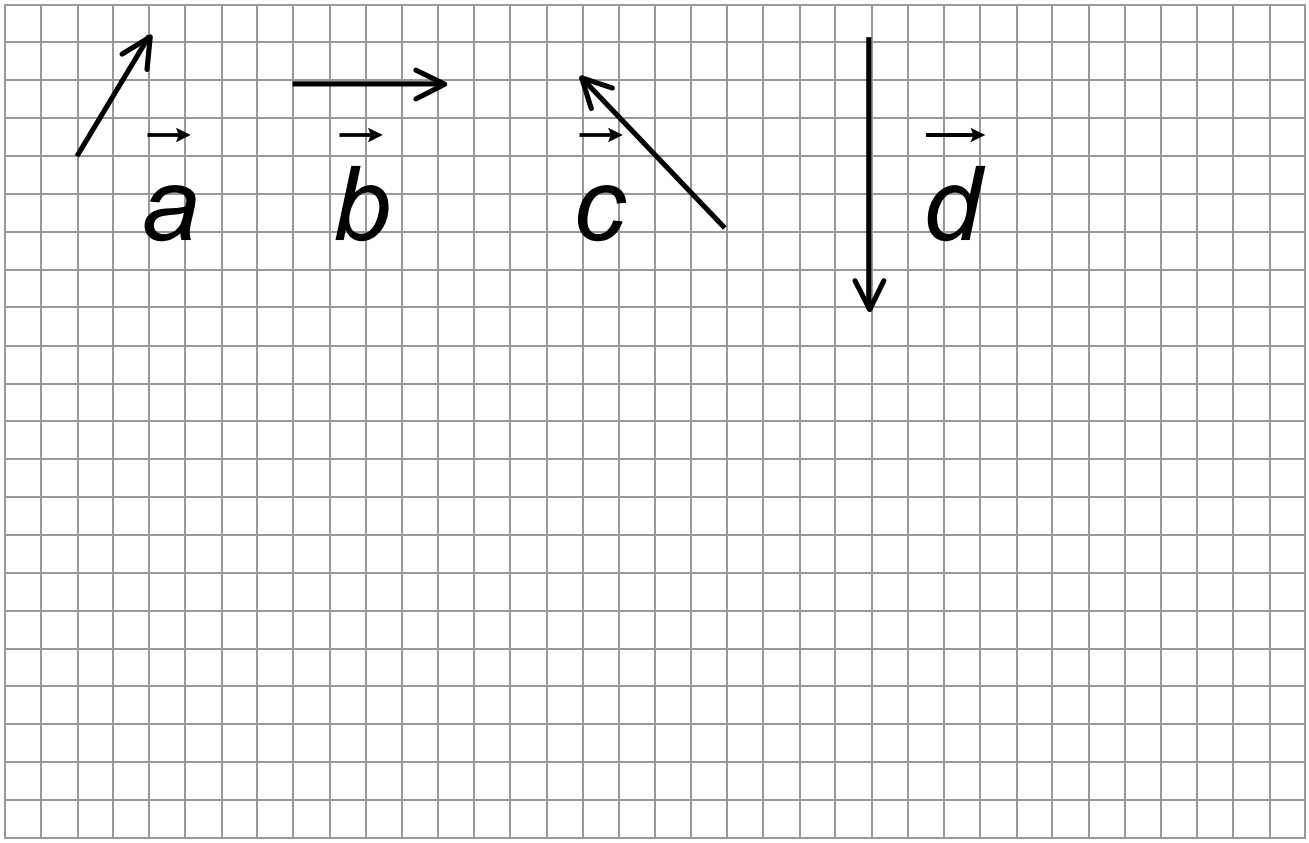
b. Abwärts:

$$F\cos\alpha + \left(F\sin\alpha + G\cos\alpha\right) \cdot f \leq G\sin\alpha$$
$$F\left(\cos\alpha + f\sin\alpha\right) \leq G\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)$$
$$\underline{\underline{F \leq \frac{G\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)}{\cos\alpha + f\sin\alpha}}}$$

Beispiel für G = 10 N, α = 75°, f = 0.1:
Aufwärts: $F \geq 61.14$ N. Abwärts: $F \leq 26.45$ N. Dazwischen: Klotz in Ruhe mit Haftreibung.

4. Übergang zu Koordinaten

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Wir haben die folgenden Additions- und Subtraktionsaufgaben a) bis f) früher bereits grafisch gelöst.



a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} - \vec{b}$ c) $\vec{a} + 2\vec{b}$ d) $\vec{a} - 3\vec{b}$
e) $-2\vec{a}$ f) $3\vec{d} - 2\vec{a} + 5\vec{b}$

Lösen Sie die Aufgaben nun ohne zu zeichnen, indem sie die resultierende Verschiebung in *x*- und in *y*-Richtung berechnen. 1 Häuschen entspreche einer Koordinateneinheit.
Wir können die gegebenen Vektoren nun wie folgt notieren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Notieren Sie die Resultate von a) bis f) in dieser Koordinatenschreibweise für Vektoren.
Die obere Zahl ist die *x*-Koordinate, die untere die *y*-Koordinaten des Vektors. Die Koordinaten geben die Verschiebung in *x*- bzw. in *y*-Richtung an.

Lösungen:

$$a)\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \; b)\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \; c)\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \; d)\begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix} \; e)\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \; f)\begin{pmatrix} 16 \\ -27 \end{pmatrix}$$

---

5. Das Skalarprodukt mit Koordinaten

Das Skalarprodukt kommt in physikalischen Formeln sehr häufig vor. Erstaunlicherweise kann es auf ausserordentlich einfache Weise berechnet werden, wenn die Vektoren in Koordinatenschreibweise dargestellt werden.

Zur Repetition:

Definition des Skalarprodukts zweier Vektoren:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos(\varphi)}$$

φ = Zwischenwinkel

Es folgt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b \quad \text{für } \vec{a} \text{ parallel } \vec{b},\ da\ \cos(0°) = 1 \\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \text{ für } \vec{a} \text{ senkrecht } \vec{b},\ da\ \cos(90°) = 0 \end{array}}$$

In Worten:

Das Skalarprodukt paralleler Vektoren ist das Produkt ihrer Beträge.
Speziell ist $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$ = Quadrat der Länge des Vektors $\vec{a}$.

Das Skalarprodukt senkrecht aufeinander stehender Vektoren ist null.

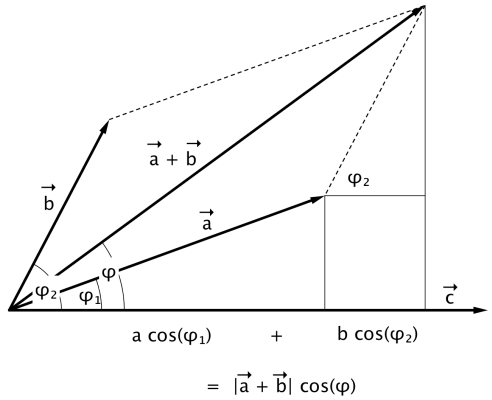
Ebenfalls gilt die Umkehrung: Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren null, so stehen sie senkrecht aufeinander.

Zudem gilt das Kommutativgesetz:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}}$$

Ferner gilt das Distributivgesetz, wie eine einfache Skizze sofort zeigt:

$$\boxed{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}}$$



$$a\cos(\varphi_1) + b\cos(\varphi_2) = \left|\vec{a}+\vec{b}\right|\cos(\varphi) \quad |\cdot c$$

$$ac\cos(\varphi_1) + bc\cos(\varphi_2) = \left|\vec{a}+\vec{b}\right| c\cos(\varphi)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c} \quad + \quad \vec{b}\cdot\vec{c} \quad = \quad \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$

Koordinatendarstellung eines Vektors im Fall von 2 Dimensionen:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos\alpha \\ a \cdot \sin\alpha \end{pmatrix}$; $\alpha =$ Winkel zwischen Vektor und x-Achse

Wir finden nun sofort eine einfache Formel für das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$, wenn die Vektoren in Koordinatenform gegeben sind:

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Wir zerlegen die Vektoren in ihre Komponenten parallel zur x- und zur y-Achse:

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \overrightarrow{b_x} + \overrightarrow{b_y} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y}\right) \cdot \left(\overrightarrow{b_x} + \overrightarrow{b_y}\right) = \overrightarrow{a_x} \cdot \overrightarrow{b_x} + \overrightarrow{a_x} \cdot \overrightarrow{b_y} + \overrightarrow{a_y} \cdot \overrightarrow{b_x} + \overrightarrow{a_y} \cdot \overrightarrow{b_y} = a_1 b_1 + 0 + 0 + a_2 b_2$$

Somit

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2}$$

Die Formel gilt sinngemäss erweitert auch für höhere Dimensionen.

Aufgaben

1. Die Kraft $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ N wirkt längs des Weges $\begin{pmatrix} 20 \\ -2 \end{pmatrix}$ m. Berechnen Sie die Arbeit.

2. Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Kraft- und dem Wegvektor in Aufgabe 1 auf 0.1° genau.

3. Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und der *x*-Achse auf 0.1° genau.

Lösungen

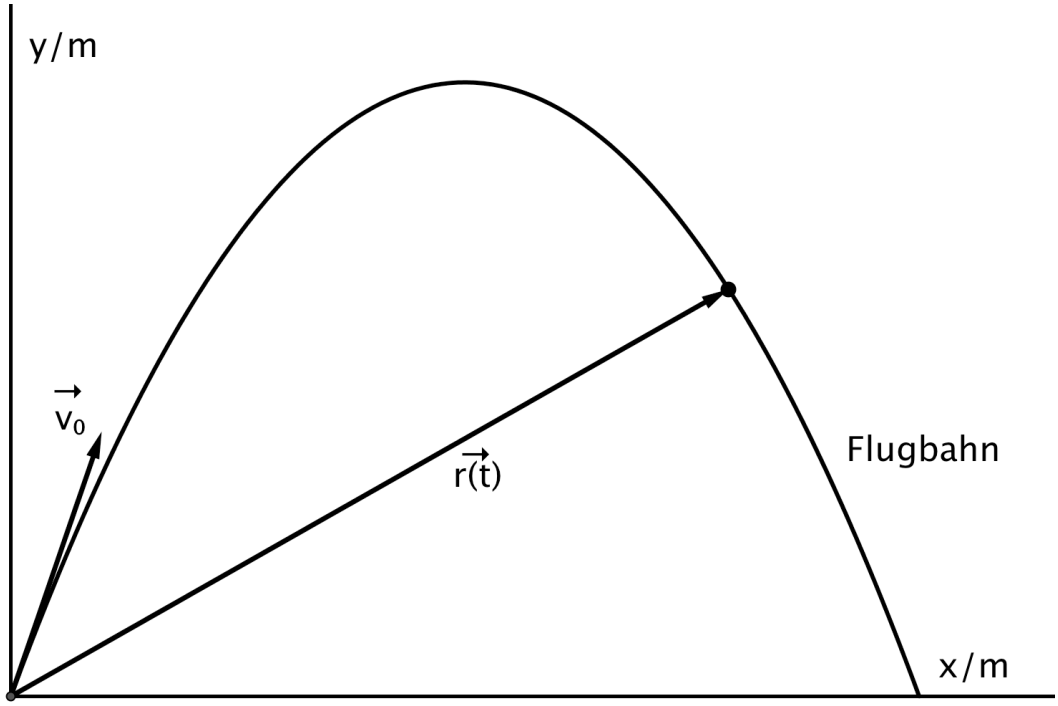
1. 50 J

2. $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \dfrac{50}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{404}} \Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\dfrac{50}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{404}}\right) \approx \underline{\underline{64.7°}}$

3. $\cos\varphi = \dfrac{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{34}\sqrt{1}} = \dfrac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{34}}\right) \approx \underline{\underline{59.0°}}$ oder mit elementarer Trigo 1.

---

6. Schiefer Wurf mit Koordinaten



Sei $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, wählen Sie $g \approx 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

a. Bestimmen Sie den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ der Bahn als Funktion der Zeit.
b. Wie gross ist der Betrag der Anfangsgeschwindigkeit?
c. Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ als Funktion der Zeit.
d. Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor nach 1 s Flug. Wie gross ist sein Betrag?
e. Nach welcher Zeit ist der Scheitel erreicht? Wie lauten die Scheitelkoordinaten?
f. Berechnen Sie die Wurfweite.

Lösung:

$a.\ \underline{\underline{\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 15t \\ 18t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}}}$ $\quad b.\ \underline{\underline{23.4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ $\quad c.\ \underline{\underline{\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 15\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 18\frac{\text{m}}{\text{s}} - gt \end{pmatrix}}}$

$d.\ \underline{\underline{\vec{v}(1) = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ $\quad \underline{\underline{|\vec{v}(1)| = 17\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$

$e.\ Scheitel: v_y = 0 \Rightarrow 18\frac{\text{m}}{\text{s}} - gt = 0 \Rightarrow \underline{\underline{t = 1.8\,\text{s}}}$

$\vec{r}(1.8\,\text{s}) = \begin{pmatrix} 15 \cdot 1.8 \\ 18 \cdot 1.8 - 5 \cdot 1.8^2 \end{pmatrix}\text{m} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 27 \\ 16.2 \end{pmatrix}}}\text{m} \Rightarrow \underline{\underline{S(27\,\text{m}/16.2\,\text{m})}}$

$f.\ Wurfweite = 2 \cdot 27\,\text{m} = \underline{\underline{54\ \text{m}}}$

---

7. Skalarprodukt in weiteren Anwendungen

1. Bei der Berechnung einer Semesternote gewichtet die Lehrkraft die erste und die dritte Prüfung doppelt, die übrigen einfach. Zu diesem Zweck definiert die Lehrkraft den Gewichtsvektor:

   $$\vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   und den Notenvektor:

   $$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5.5 \\ 4.5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   eines Schülers.

   Welche Bedeutung hat die Formel $\frac{1}{7}\vec{g} \cdot \vec{n}$?

2. Ein Mittelstreckenläufer trainiert, indem er acht Mal mit kurzen Zwischenpausen 200 m läuft. Er notiert seine 8 Zeiten in Sekunden im Zeitvektor

   $$\vec{t} = \begin{pmatrix} 27.83 \\ 28.44 \\ 29.13 \\ 27.76 \\ 29.31 \\ 29.15 \\ 30.12 \\ 28.15 \end{pmatrix}. \text{ Ferner sei } \vec{k} = \begin{pmatrix} 1/27.83 \\ 1/28.44 \\ 1/29.13 \\ 1/27.76 \\ 1/29.31 \\ 1/29.15 \\ 1/30.12 \\ 1/28.15 \end{pmatrix}; \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{z} = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

   Welche Bedeutung haben folgende Ausdrücke (nicht berechnen!)?

   a. $\vec{t} \cdot \vec{e}$ *b.* $\vec{z} \cdot \vec{e}$ *c.* $\frac{1}{8}\vec{t} \cdot \vec{e}$ *d.* $\frac{1}{8}\vec{k} \cdot \vec{z}$ *e.* $\frac{\vec{z} \cdot \vec{e}}{\vec{t} \cdot \vec{e}}$

Lösungen in der Lektion